



TITLE:

13.フラクタルな界面の運動II: 計算機シミュレーション(パターン形成、運動と統計,研究会報告)

AUTHOR(S):

折原, 宏; 長屋, 智之; 石橋, 善弘

CITATION:

折原, 宏 ...[et al]. 13.フラクタルな界面の運動II: 計算機シミュレーション(パターン形成、運動と統計,研究会報告). 物性研究 1988, 50(3): 341-345

ISSUE DATE:

1988-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/93105>

RIGHT:

13. フラクタルな界面の運動Ⅱ

(計算機シミュレーション)

名大・工 折原 宏、長屋智之、石橋善弘

§ 1. はじめに

非保存系において初期界面がフラクタルである場合の時間発展は、豊木・本田¹⁾により調べられている。彼らは動的スケーリング則を仮定して、界面密度 $A(t)$ の時間依存性が

$$A(t) \propto t^{-(D+1-d)/2} \quad (1)$$

となることを示した。但し、 D は初期界面のフラクタル次元であり、 d は空間次元である。この様に、ベキ指数はフラクタル次元 D に依存する。しかし、通常、急冷過程において現れる界面は空間を埋めつくしており、 $D = d$ である。したがって、(1) 式は良く知られている Allen-Cahn の $t^{-1/2}$ 則²⁾ を与えるのみである。そこで、我々は視点を変え、すべての界面の密度の替わりに、一つの界面の面積に着目した。当然、この場合 $D < d$ であるから、指数の絶対値は $1/2$ より小さくなる。実験例としては、ツイストネマチック液晶の急冷過程がある。³⁾

今回、このような系の時間発展を詳しく調べる目的で、計算機シミュレーションを行った。非保存系の界面の運動方程式は

$$v = \Gamma K^\beta \quad (2)$$

で与えられる。但し、 v は着目した界面上の点の法線速度、 Γ は運動係数、 K は曲率、 β は定数である。現実の界面では $\beta = 1$ であるが、計算機シミュレーションでは、 $\beta \neq 1$ の例を扱うことができ、動的スケーリング則への影響を考えると興味深い。界面密度は、豊木・本田によれば、¹⁾

$$A(t) \propto t^{-(D+1-d)/(\beta+1)} \quad (3)$$

となる。

我々はすでに、 $d = 2$ 、 $\beta = 1$ の系において、界面（曲線）の接線ベクトルの相関関数がス

ケーリング則を満たすことを、(2) 式を近似的に解いて示している。³⁾ $\beta \neq 1$ の場合にも同様な方法で解くことができる。⁴⁾ $t = 0$ において平面上にフラクタルな一本の界面(曲線)があったときの時刻 t における界面の長さ $L_s(t)$ は

$$L_s(t) \propto t^{-(D-1)/(\beta+1)} \quad (4)$$

となり、接線ベクトルの相関関数 $C_t(s, t)$ は

$$\begin{aligned} C_t(s, t) &\equiv \langle t(s, t) \cdot t(0, t) \rangle \\ &= f(s/\xi_s(t)) \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \xi_s^2(t) &= 8 \Gamma C^{(\beta-1)/(\beta+1)} ((\beta+1)/2D)^{2/(\beta+1)} t^{2/(\beta+1)} \end{aligned} \quad (5b)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-x')^2/2} |x'|^{-2(D-1)/D} dx' \quad (5c)$$

で与えられる。但し、 $t(s, t)$ は時刻 t において原点から曲線上で s 離れた点における接線ベクトルであり、 $\Gamma(x)$ はガンマ関数である。定数 C は初期のフラクタル界面の形状により定まり、 $\beta = 1$ のときには現れない。上式で、特徴的長さ ξ_s のべき指数は β だけに依存し、初期界面のフラクタル次元 D には依存しないという点は注目に値する。

以下、シミュレーションの結果を示し、上記の理論と比較する。

§ 2. シミュレーション

初期界面には、Mandelbrotにより考案されたsquig曲線をとった。squig曲線は自己回避曲線であり、そのフラクタル次元は $D = 1.5 / \log 2$ である。⁵⁾ シミュレーションでは、曲線を折れ線で置き換え、各点における曲率を求め、(2) 式に従って時間発展させた。

$\beta = 1$ の時の界面の時間発展の様子を図1に示す。大きなスケールで見ると変わらないが、小さなスケールでは、時間の経過と共に曲線がなめらかになっているのがわかる。曲線の長さの時間依存性 $L_s(t)$ を図2に示す。初期の時刻を除き、良く直線に乗り、その傾きは(4)式で予想されるものとほぼ完全に一致している。図3に接線ベクトルの相関関数を示す。時間

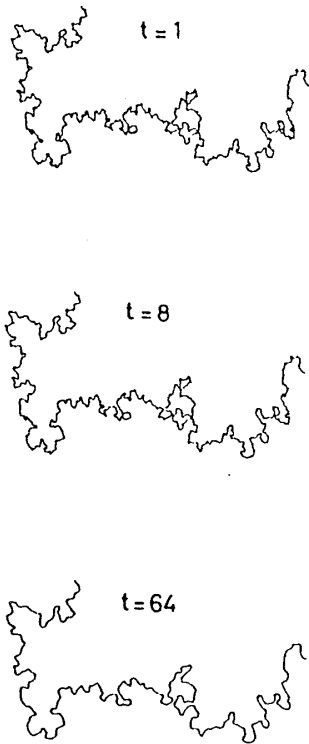


図1 SQUIG曲線の時間発展。

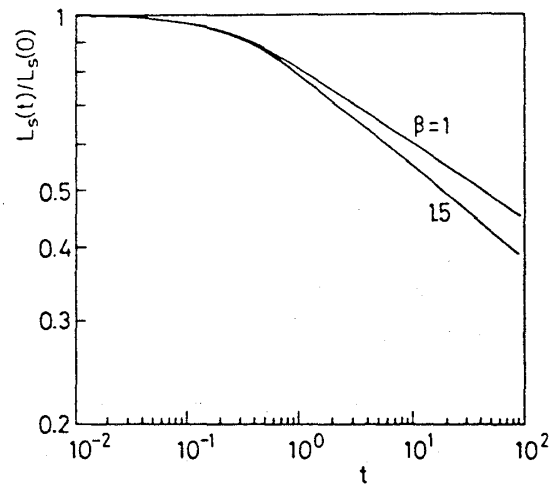


図2 曲線の長さの時間依存。

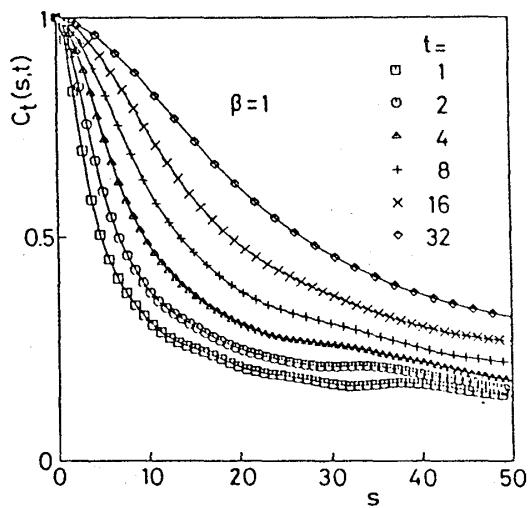


図3 接線ベクトルの相関関数 ($\beta = 1$)。

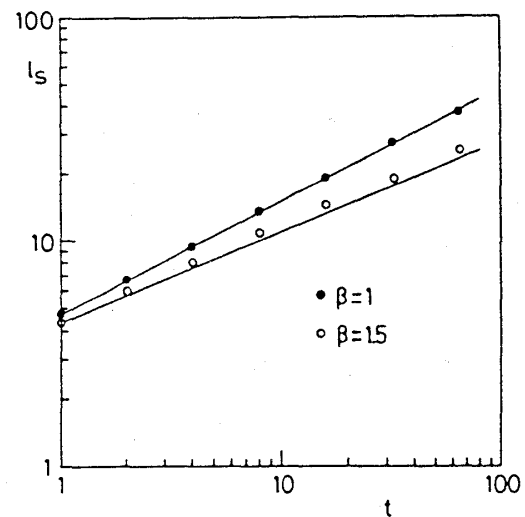


図4 相関長の時間依存 (実線は理論)。

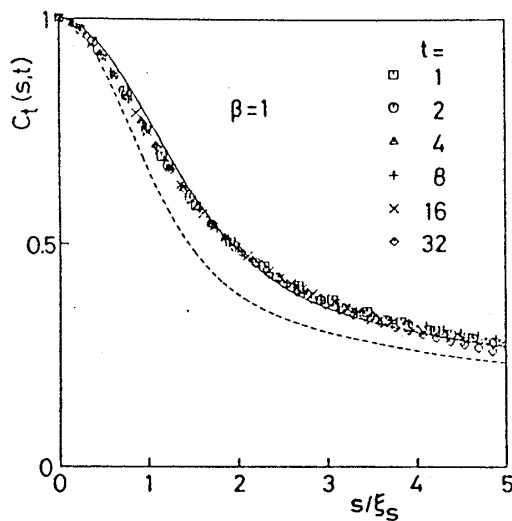


図5 スケールされた相関関数
($\beta = 1$)。破線は理論。
実線は理論の横軸を適当
にスケールしたもの。

の経過とともに、幅が広がり、相関距離が長くなっているのがわかる。相関距離 ℓ_s を相関関数が 0.5 になる距離と定義する。 ℓ_s は特徴的長さ ξ_s に比例するから、その指数は $1/2$ になるはずである。図4に示す様に $\beta = 1$ の場合には、データ（黒丸）は理論（実線）と良く一致している。動的スケーリング則が成立しているのを確かめるために、図3の横軸を特徴的長さ ξ_s でスケールしてみた（図5）。非常に良くスケールされている。スケーリング関数については、理論を点線で示したが、実験との一致はあまり良くない。そこで、理論で導出されたスケーリング関数の横軸を 1.33 倍したところ、実験とほぼ一致した。つまり、 ξ_s を 1.33 倍する必要があることがわかる。

$\beta = 1.5$ の場合を次に示す。曲線の長さの時間依存性（図2）は、 $\beta = 1$ の場合と同様に理論との一致は非常に良い。相関関数（図6）は $\beta = 1$ の場合とほぼ同じであるが、相関距離が全体としては短くなっている。相関距離の時間依存性（図4）は理論（実線）と多少の食い違いがみられる。理論的に導出した（5）式は、 β が大きくなるほど近似が悪くなることを示

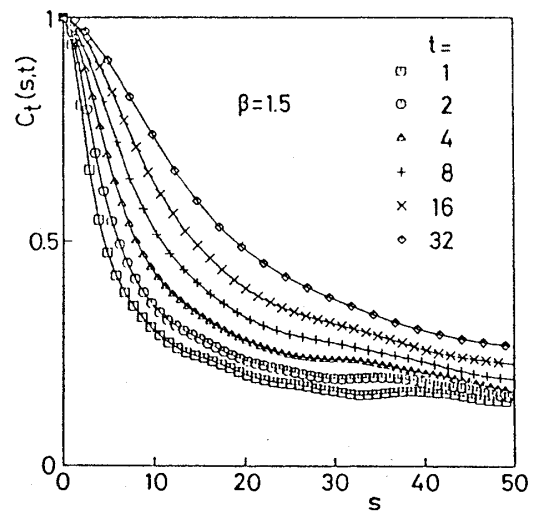


図6 接線ベクトルの相関関数
($\beta = 1.5$)。

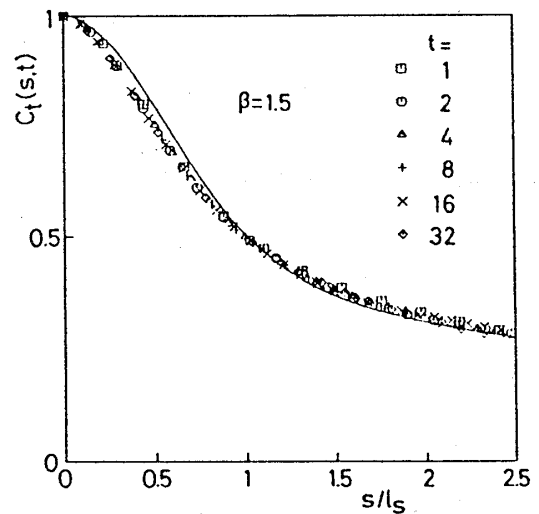


図7 スケールされた相関関数
($\beta = 1.5$)。実線は理論
の横軸を適当にスケールした
もの。

すことができ、食い違いはこれに起因していると思われる。スケーリング則は図7に示す様に $\beta = 1$ の時同様良く成立している。但し、図7の横軸は l_s でスケールしたもので、実線はスケーリング関数 (5c) の横軸のスケールを適当に調節したものである。

§ 3. まとめ

初期にフラクタルである界面の運動をシミュレートした。その結果、

- 1) 曲線の長さは (4) 式に従う、
- 2) 接線ベクトルの相関関数を求めることにより、動的スケーリング則が成立している、のが見出された。さらに、理論的に導出した相関関数と比較した結果、
- 3) スケーリング関数は理論と良く一致した、
- 4) 特徴的長さ l_s は理論で得られたものを 1.33 倍する必要がある、ことがわかった。なお、
- 5) squig 曲線の場合には、(5-b) 式の定数 C は約 0.2、であった。

文献

- 1) H. Toyoki and K. Honda: Phys. Lett. 111 (1985) 367.
- 2) S. M. Allen and J. W. Cahn: Acta. Metall. 27 (1979) 1085.
- 3) H. Orihara and Y. Ishibashi: J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987) 2338.
- 4) H. Orihara, T. Nagaya and Y. Ishibashi (投稿準備中).
- 5) B. Mandelbrot: The Fractal Geometry of Nature (Freeman San Francisco, 1982).